Eugeniusz Wojciechowski

T-SCHEMAT BEZ ANTYNOMII KŁAMCY

W tekstach logicznych i filozoficznych prawdziwość (i analogicznie fałszywość) zdania *p* jest wyrażana na dwa sposoby:

1. predykatowy (orzecznikowy) – *p jest prawdziwe* jest wyrażane przez:
zdanie p jest prawdziwe – krócej – *prawda*(*zdanie p*)[1], ponieważ argumentem funktora *prawda* jest tu nazwa tego zdania.

2. Operatorowy (modalny) – *p jest prawdziwe* jest wyrażane przez zwroty:
prawdą jest, że p | *prawda, że p* | *zaprawdę p* – krócej – *prawda*(*p*).

W tekstach klasycznych zwolennicy sposobu pierwszego (Łukasiewicz,Tarski) termin *prawda* traktują jako funktor kategorii *s*/*n*, a zwolennicy drugiego ujęcia (Gödel, von Wright) – jako funktor *s*/*s*.

Problem antynomii kłamcy pojawia się przy predykatowym traktowaniu terminu *prawda* i został postawiony na nowo przez Alfreda Tarskiego, w jego słynnej pracy *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych* ([Tarski 1933]).

Tarski zwroty typu *zdanie p jest prawdziwe* zapisywał za pomocą cudzysłowu: *„p" jest prawdziwe*. Preferowane tu będzie posługiwanie się słowem *zdanie*, które stojąc przed sekwencją wyrażeń danego języka naturalnego (spełniając kryteria gramatyczne bycia zdaniem tego języka), przekształca je w nazwę tego zdania. Termin *zdanie* w tego typu kontekstach pełni rolę funktora kategorii *n*/*s*, funkcjonuje selektywniej niż cudzysłów. Za pomocą cudzysłowu, użytego w podobny sposób, możemy nazwać dowolny ciąg wyrażeń danego języka, który nie musi być zdaniem. Istotną wadą lingwistyczną posługiwania się cudzysłowem w interesującej nas tu roli jest to, że posłużyć się nim możemy jedynie (z natury rzeczy) w języku pisanym. Wadę natury logicznej cudzysłowu w tego typu kontekstach (podkreślaną przez Tarskiego) stanowi to, że możemy go interpretować jako funktor *wiążący* lub *niewiążący* zmienne występujące w jego zasięgu[2].

Terminu *prawda* będziemy używali dalej wyłącznie w znaczeniu predykatowym. Termin *zdanie*[3] będzie traktowany jako funktor, który pojawiając się w zasięgu funktora *prawda*, tworzy dla niego argument.

---

[1] Zamiast terminu *zdanie*, w zależności od stanowiska w sprawie nośników prawdy (fałszu), mogą się pojawić inne terminy: *wypowiedź* | *sąd* | *myśl*.

[2] Cudzysłów poza tym funkcjonuje w tekstach (zwłaszcza filozoficznych) w najprzeróżniejszych innych rolach. Przedstawił to w interesujący sposób A. Nowaczyk, *O roli cudzysłowu w filozofii*, „Edukacja Filozoficzna", 2001, 32, 73–79.

[3] Posługiwanie się terminem *zdanie* w tych kontekstach jest merytorycznie uzasadnione. Mogą być konstruowane zdania, zbudowane zgodnie z regułami składni danego języka, które nie są zdaniami prawdziwymi ani fałszywymi w tym języku. Nie można by użyć w tym kontekście terminu *sąd*, bo sąd – zgod-

1. Analiza poprzedzająca rozwiązanie antynomii kłamcy

Założenia przyjmowane na gruncie języka J, zbudowanego w duchu języka naturalnego, które doprowadziłyby do antynomii kłamcy:

1. Założenie *semantycznej zamkniętości* języka J
   1) dopuszczenie[4] zdań samozwrotnych o formie: x = *zdanie fałsz*(x)
   2) T-*schemat*: *prawda*(*zdanie p*) ↔ *p*
   3) założenie obowiązywania klasycznej teorii identyczności w J
   4) zasada ekstensjonalności dla identyczności
   5) założenie obowiązywania *klasycznej logiki* w języku J
   6) definicja fałszu: *fałsz*(x) = ~ *prawda*(x)

W rezultacie na gruncie J otrzymujemy antynomię kłamcy:

x = *zdanie fałsz*(x) zatem:

(*prawda*(x) ↔ *prawda*(*zdanie fałsz* (x)))
prawda(x) ↔ *fałsz*(x)
prawda(x) ↔ ~ *prawda*(x)

Rozwiązanie Tarskiego

Rozwiązanie Tarskiego polega na odrzuceniu zasady semantycznej zamkniętości, co pociąga za sobą ograniczenie klasy rozważanych języków. Tarski konstruuje semantyczną koncepcję prawdy[5] dla języków nauk dedukcyjnych, w których to termin *prawda* (*fałsz*) jest terminem metajęzykowym, a wyżej określone zdania samozwrotne są *ex definitione* zdaniami bezsensownymi[6].

Rozwiązanie alternatywne

T-schemat zapisujemy:

T([*p*]) ↔ *p*,
gdzie [*p*] – proponujemy czytać – *„zdanie p”*.

---

nie z klasyczną doktryną semantyczną – może być jedynie prawdziwy lub fałszywy. Dane zdanie prawdziwe (fałszywe) wyraża sąd prawdziwy (fałszywy).

[4] W sensie – traktowanie tych zdań jako poprawnie zbudowanych.

[5] Poza Szkołą Lwowsko-Warszawską spotkała się ona z przychylnym przyjęciem ze strony przedstawicieli empiryzmu logicznego i istotnie wpłynęła na rozwój tego kierunku (Tugendhat 1960). Wiele informacji na temat recepcji i późniejszej krytyki tej koncepcji, wraz z krytycznym komentarzem, można znaleźć w *Epistemologii* prof. Jana Woleńskiego, Warszawa 2005.

[6] U Tarskiego, jak na to wyżej wskazywaliśmy, rolę wyrażenia *zdanie* pełni cudzysłów. Tarski używa świadomie określenia *T-konwencja*, a nie *T-schemat*, bo jego zdaniem przyjmowanie T-schematu wiązałoby się z uznaniem cudzysłowu za funktor (kategorii *n*/*s*), a to z kolei, dla zwolenników ekstensjonalizmu, doprowadziłoby do nieintuicyjnej konsekwencji. Zob. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Warszawa 1933. Sprawą tą zajmiemy się później w rozdziale: *Zasada ekstensjonalności*.

W proponowanej niżej konstrukcji wzbogacamy klasyczny rachunek zdań o nowy typ negacji (¬), zwanej dalej *negacją wewnętrzną*, w odróżnieniu od klasycznej negacji (~) – nazywanej w tym kontekście – *negacją zewnętrzną*[7].
Tezą jest tu:

$$p \leftrightarrow \sim \neg p$$

Tarskiego definicję fałszu – F(x) ↔ T(*x*) – zastępujemy definicją (lub tezą, w zależności od ujęcia):

$$\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \neg\, \mathrm{T}(x)$$

Język klasycznego rachunku zdań jest tu rozszerzany o wyrażenia kategorii nazwowej i funktory (kategorii *s*/*n*) oraz nowy funktor negacji. Zdefiniujemy go indukcyjnie, mając na uwadze kolejne ujęcia naszej konstrukcji:
Alfabet. W skład naszego języka wchodzą następujące symbole:
(1) zmienne zdaniowe – (*p*,*q*,*r*),
(2) zmienne nazwowe – (*x*,*y*,*z*),
(3) zmienne funktorowe – (*f*,*g*,*h*) – kategorii – *s*/*n*,
(4) stałe zdaniowe – (*a*,*b*,*c*) – kategorii – *s*
(5) stałe funktorowe:

¬, ~ – kategorii – *s*/*s*,
[] – kategorii – *n*/*s*,
T,F – kategorii – s/*n*
= – kategorii – *s*/*nn*
↔, →, ∧, ∨– kategorii – *s*/*ss*

(6) nawiasy – (,).

Formuła
(1) Wszystkie zmienne zdaniowe są formułami.
(2) Jeżeli *a* jest zmienną nazwową a δ funktorem kategorii *s*/*n*, to δ(*a*) jest formułą.
(3) Jeżeli α jest formułą a δ funktorem kategorii *s*/*n*, to δ([α]) jest też formułą.
(4) Jeżeli α jest formułą to ~α i ¬ α są też formułami.
(5) Jeżeli α i β są formułami, to α↔β, α→β, α ∨β oraz α ∧β są też formułami.

W zapisie formuł przyjmiemy konwencję oszczędzania nawiasów: funktory: ¬, ~, ∧, ∨, →, ↔ są uporządkowane od wiążącego najsilniej do wiążącego najsłabiej.

Terminy
(1) Wszystkie zmienne nazwowe są terminami.
(2) Jeżeli α jest formułą, to [α] jest też terminem.

[7] Teorię wprowadzającą negację wewnętrzną przedstawimy niżej w rozdziale *Preleminaria*. Interesującą argumentację na rzecz wyjścia poza KRZ przy analizie języka naturalnego w związku z koncepcją Tarskiego przedstawia M. Dummett, *Logiczna podstawa metafizyki*, PWN, Warszawa 1998, s. 108.

2. Preleminaria

Teoria identyczności. Teoria identyczności (**TI**) w jednym ze sformułowań[8] jest ugruntowana na aksjomacie

AI $x=x$

oraz *regule ekstensjonalności dla identyczności*:

REI $a=b,\alpha/\alpha(b//a)$,

gdzie *a* i *b* są terminami, α dowolną formułą zdaniową, a α(*b*//a) jest formułą, która powstaje z formuły α przez zastąpienie terminu *a* (w jednym lub więcej miejscach) terminem *b*.
Bezpośrednimi konsekwencjami AI i REI są:

TI1 $x=y \rightarrow y=x$
TI2 $x=y \wedge y=z \rightarrow x=z$

Z uwagi na symetrię funktora identyczności (TI1) regułą wtórną **TI** jest:

$a=b,\alpha/\alpha(a//b)$,

którą również będziemy oznaczali symbolem REI.

Negacja zewnętrzna i negacja wewnętrzna. Specyficzny aksjomat wprowadzający funktor *negacji wewnętrznej* (¬) ma postać[9]:

A¬ $f(x) \rightarrow {\sim}\neg f(x)$

Definicyjnie jest tu wprowadzany funktor *nieokreśloności*[10]:
D? $?f(x) \leftrightarrow {\sim}f(x) \wedge {\sim}\neg f(x)$
Do tez będących bezpośrednimi konsekwencjami A1 i D? należą:

TN1 ${\sim}(f(x) \wedge \neg f(x))$
TN2 $\neg f(x) \rightarrow {\sim}f(x)$
TN3 $f(x) \vee \neg f(x) \vee ?f(x)$

---

[8] Por. J. Słupecki, L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa 1969, s. 108.

[9] Autorem rozróżnienia między tymi dwoma typami negacji jest Aleksander Zinowiew (w transkrypcji niemieckiej: „Sinowjew:"). Zob. A. Sinowjew, *Nichttraditionelle Quantorentheorie* (tłumaczenie z rosyjskiego – H. Wessel) [w:] *Quantoren-Modalitäten-Paradoxien, Beiträge zur Logik* (H. Wessel, red.), Deuts cher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972, 179–205. Ideę tę rozwija wraz z nim Horst Wessel zob.: Sinowjew & Wessel, *Logische Sprachregeln*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975, s. 239. Do jej rozpowszechnienia przyczynia się podręcznik drugiego z tych logików – *Logik* [Wessel 1984]. Tam też można znaleźć równoważne sformułowanie tego aksjomatu (s. 186).

[10] Definicje zapisujemy w konwencji Leśniewskiego – jako równoważności.

Rozróżnienie między tymi dwoma typami negacji, pomocne w analizie języka naturalnego, pozwala na traktowanie tak samo zdań typu:

Księżyc jest szczery – w skrócie – *szczery(Księżyc)*
Księżyc nie jest szczery – w skrócie – $\neg$*szczery(Księżyc)*,

tj. ich łączne zanegowanie (negacja zewnętrzna), a więc uznanie za prawdziwe, w zgodzie z naszymi intuicjami, zdania:

$\sim$*szczery(Księżyc)* $\wedge \sim\neg$ *szczery(Księżyc)*,

co jest równoważne ze zdaniem

?*szczery(Księżyc)*,
a co można wyrazić słownie: – *bycie szczerym Księżycowi nie przysługuje*[11].

3. Ujęcie pierwsze

Ujęciem pierwszym rozwijanej tu konstrukcji (**TT1**) nazwiemy wzbogacenie klasycznego rachunku zdań (**KRZ**) o teorię identyczności (**TI**) i aksjomaty specyficzne A$\neg$ i AT. Niech **TT**=**KRZ**[AT] $\cap$**TI**, to **TT1**=**TT**[A1][12].

Przyjmiemy następujące aksjomaty specyficzne:

AT $T([p]) \leftrightarrow p$

A$\neg$ $f(x) \rightarrow \sim\neg f(x)$

Definicyjnie przyjmiemy funktor nieokreśloności (D? – jak wyżej) oraz funktor *bycia fałszem*:

DF $F(x) \leftrightarrow \neg T(x)$

Reguły. Do reguł pierwotnych systemu należą: reguła odrywania (MP), reguła podstawiania (RS) i reguła ekstensjonalności dla identyczności (REI). Reguły te są odpowiednio rozszerzone do języka systemu.

---

[11] Por. H. Wessel, *Logik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984, s. 178.

[12] Wzbogacenie **TT** o aksjomat A1 można traktować jako cenę za rozwiązanie tego problemu. Ujęcie drugie będzie zgodne z naszymi intuicjami. Zdecydowałem się na taką kolejność w przedstawianiu tych konstrukcji z dwóch powodów. Po pierwsze, jest to porządek chronologiczny (w takiej kolejności znajdowałem te rozwiązania) i po drugie, kolejność ta jest merytorycznie uzasadniona – ujęcia następne są bardziej ogólne.

Antynomijna konstrukcja Tarskiego
Niech c oznacza pewne zdanie, o którym założymy z kolei, że[13]

(a) c=[F(c)]

co pociąga za sobą:

(b) $T(c) \leftrightarrow \neg T(c)$ [a,DF,AT]

Z (a) i (b) otrzymujemy jedynie[14]:

(c) ?T(c)

Dem.

(1)	$T(c) \vee \neg T(c) \vee ?T(c)$	[TN3]
(1a)	$T(c)$	[zd1]
(1b)	$\sim\neg T(c)$	[A¬,1a×MP]
(1c)	$\neg T(c)$	[1a,b,**KRZ**]
	sprz.	[1b,1c]
(2a)	$\neg T(c)$	[zd2]
(2b)	$\sim T(c)$	[A¬,2a,**KRZ**]
(2c)	$T(c)$	[2a,b,**KRZ**]
	sprz.	[2b,2c]
(2)	?T(c)	[1,1a → sprz.,2a → sprz.]

4. Ujęcie drugie

Rozważmy z kolei konstrukcję **TT2** = **TT**[AF,EF]
Nowymi aksjomatami są tu:

AF $T(x) \rightarrow \sim F(x)$

EF $F(x) \leftrightarrow F([T(x)])$

Definicyjnie przyjmiemy funktory negacji wewnętrznej i nieokreśloności:

D¬ $\neg p \leftrightarrow F([p])$

[13] Por. A. Tarski, *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Warszawa 1933, s. 7.

[14] Jeśliby przyjąć definicję $F(x) \leftrightarrow \sim T(x)$, tak jak to czynił Tarski, to zamiast (b) otrzymaliby $T(c) \leftrightarrow \sim T(c)$, co generowałoby sprzeczność. Dowody budujemy w sposób założeniowy. Wyrażenia z, zd, zdn i sprz., pojawiające się w dowodach tez, są odpowiednio skrótami wyrażeń: założenie 1, założenie dodatkowe 2, założenie dowodu niewprost i sprzeczność. Ponadto, tam gdzie pojawią się symbole „Hp(...)" i „T" znaczą odpowiednio: *założenie* (*liczba przesłanek*) oraz *teza* (dowodzony następnik implikacji).

D? $?p \leftrightarrow {\sim}p \wedge {\sim}\neg p$

Przyjmujemy tu te same reguły co poprzednio.

Wybrane tezy

T1a $p \rightarrow {\sim}\neg p$

Dem.

(1)	p	[z]
(2)	$\mathrm{T}([p])$	[1,AT]
(3)	${\sim}\mathrm{F}([p])$	[2,AF×MP]
(4)	${\sim}\neg p$	[3,D¬]

T1b $\neg p \rightarrow {\sim}p$ [T1a,**KRZ**]

T1c ${\sim}(p \wedge \neg p)$ [T1b,**KRZ**]

T2 $f(x) \rightarrow {\sim}\neg f(p)$ [T1a]

T3 $f(x) \vee \neg f(x) \vee ?f(x)$ [D?,**KRZ**]

T4 $[p]=[q] \rightarrow (p \leftrightarrow q)$

Dem.

(1)	$[p]=[q]$	[z]
(2)	$\mathrm{T}([p]) \leftrightarrow \mathrm{T}([q])$	[1×REI]
(3)	$p \leftrightarrow q$	[2,AT×RE]

Przy pomocy AT i RE otrzymujemy również:

T5a $\mathrm{T}([{\sim}p]) \leftrightarrow {\sim}\mathrm{T}([p])$
T5b $\mathrm{T}([p \wedge q]) \leftrightarrow \mathrm{T}([p]) \wedge \mathrm{T}([q])$
T5c $\mathrm{T}([p \vee q]) \leftrightarrow \mathrm{T}([p]) \vee \mathrm{T}([q])$
T5d $\mathrm{T}([p \rightarrow q]) \leftrightarrow (\mathrm{T}([p]) \rightarrow \mathrm{T}([q]))$

T6 $\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{T}(x)$

Dem.

(1)	$\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \mathrm{F}([\mathrm{T}(x)])$	[EF]
(2)	$\mathrm{F}(x) \leftrightarrow \neg\mathrm{T}(x)$	[1,D¬]

5. Zdania samozwrotne

Zdanie (a) ma formę zdania samozwrotnego (z funktorem „F"). Powiemy ogólnie, że formuła:

$x=[\mathrm{F}(x)]$

jest *schematem samozwrotności z uwagi na fałsz.*

Tezą naszego systemu jest[15]:

T7 $x=[F(x)] \rightarrow ?T(x)$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$\sim ?T(x)$	[zdn]
(3)	$T(x) \vee \neg T(x)$	[2,D?]
(3a)	$T(x)$	[zd1]
(3b)	$T(x) \leftrightarrow T([F(x)])$	[1×RE]
(3c)	$T([F(x)])$	[3a,3b]
(3d)	$F(x)$	[3c,A1]
(3e)	$\sim F(x)$	[3a,A2×MP]
	sprz.	[3d,3e]
(4a)	$\neg T(x)$	[zd2]
(4b)	$F(x)$	[4a,T6]
(4c)	$F(x) \leftrightarrow F([F(x)])$	[1×RE]
(4d)	$F([F(x)])$	[4b,4c]
(4e)	$\neg F(x)$	[4d,D¬]
(4f)	$\sim\neg F(x)$	[4b,T2]
	sprz.	[4e,4f]

Schematem zdań samozwrotnych jest również:

$x=[T(x)]$,

który nazwiemy *schematem zdań samozwrotnych z uwagi na prawdę*.
Nie da się z niego wygenerować odpowiednika tezy T7. Wydaje się jednak, że zdania spełniające ten schemat rażą tak samo nasze intuicje językowe i powinny być traktowane analogicznie[16].
Aby być w zgodzie z naszymi intuicjami, wzbogacimy naszą konstrukcję o nowy aksjomat:

AST $x\ [T(x)] \rightarrow \sim T(x) \wedge \sim F(x)$

Aksjomat ten jest niezależny od pozostałych.

6. Zasada ekstensjonalności

Na gruncie **KRZ** obowiązuje zasada ekstensjonalności, która jest formułowana w dwojaki sposób – jako prawo ekstensjonalności lub jako reguła ekstensjonalności.

---

[15] Jest to uogólnienie wcześniejszej implikacji: (a) → (c).

[16] Zwraca na to uwagę prof. Jan Woleński. Por. J. Woleński, *Samozwrotność i odrzucanie*, „Filozofia Nauki", 1993, 1, s. 91.

Prawo ekstensjonalności można wyrazić w formie:

PE $(p \leftrightarrow q) \rightarrow (\delta(p) \leftrightarrow \delta(q))$[17],

gdzie δ jest funktorem kategorii *s/s*. W szczególności:
(1) δ jest jednym z czterech funktorów jednoargumentowych **KRZ** (verrum, asercja, negacja, falsum),
(2) δ jest funktorem parametrycznym, zbudowanym według schematu $\zeta\langle q\rangle(p)$, gdzie $\zeta\langle q\rangle(p) \leftrightarrow \alpha(p,q)$ i α jest zbudowana jedynie za pomocą funktorów zdaniotwórczych o argumentach zdaniowych[18].

Prawo ekstensjonalności jest dowodzone indukcyjnie, z uwagi na wyżej scharakteryzowane funktory δ.
Metajęzykowy odpowiednik PE stanowi reguła ekstensjonalności, która jest regułą wtórną[19]:

RE $\alpha \leftrightarrow \beta/\gamma \leftrightarrow \gamma(\alpha//\beta)$,

gdzie $\gamma(\alpha//\beta)$ oznacza tu formułę, która powstała z γ przez zastąpienie pewnej jej podformuły α formułą β.
Regułą wtórną jest też reguła:

$\alpha \leftrightarrow \beta,\gamma/\gamma(\alpha//\beta)$,

która jest również tak samo nazywana[20].

---

[17] Z uwagi na symetrię funktora równoważności następnik tego sformułowania wyrażany jest również za pomocą funktora implikacji.

[18] To ograniczenie funktorów zdaniotwórczych do funktorów posiadających jedynie argumenty kategorii zdaniowej (zbędne – z natury rzeczy – na gruncie **KRZ**) jest tu istotne, z uwagi na rozszerzenie naszego języka o nowe funktory (funktor identyczności i funktory specyficzne naszej konstrukcji). Wykroczenie przeciwko temu ograniczeniu pozwoliłoby przyjąć np. taką definicję funktora parametrycznego:
D*sid* $sid\langle x\rangle(p) \leftrightarrow x=[p]$
Przy pomocy tej definicji uzyskalibyśmy niepożądaną tu tezę:
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [p]=[q]$
Dem.
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow [p]=[q]$
Dem.
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (sid\langle [p]\rangle(p) \leftrightarrow sid\langle [p]\rangle(q))$ [D*sid*, RE]
$[p]=[p] \leftrightarrow [p]=[q]$ [D*sid*]
$[p]=[q]$ **[TI]**

[19] Zob. J. Słupecki & L. Borkowski, *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa 1969, s. 42.

[20] Obowiązuje tu również ograniczenie wprowadzone w (2) sformułowania PE, które się przenosi na RE (metajęzykowy odpowiednik PE). Przy braku tego ograniczenia ze zdania $[p] = [p]$, które jest tu tezą, oraz z równoważności $p \leftrightarrow q$ otrzymalibyśmy niepożądaną tezę – $[p]=[q]$.

Powstaje naturalne pytanie, czy funktory specyficzne rozwijanej tu konstrukcji (T,F,–) są również ekstensjonalne?
Odpowiedź jest pozytywna. Stosowne prawa ekstensjonalności zostaną podane w następnym rozdziale. Prawa te pozwolą na uproszczenie przyjmowanej tu aksjomatyki.

7. Ujęcie trzecie

Ostatni z systemów (**TT3**) ma dwa aksjomaty specyficzne (AT, AST).
Oprócz reguł inferencyjnych, które posiadały konstrukcje wcześniejsze (MP, RS, REI), przyjmiemy jeszcze regułę:

Rδ $\alpha(\delta(x))/x=[a]$,

gdzie δ=T,F oraz a jest stałą zdaniową, która nie pojawiła się we wcześniejszym wierszu dowodowym.
W zgodzie z przyjętą konwencją notacyjną – **TT3** = **TT**[AST, Rδ].
Wprowadzimy definicyjnie funktor pomocniczy:

D*in* $in\langle q\rangle(p) \leftrightarrow (q \leftrightarrow \neg p)$
Tezami systemu są prawa ekstensjonalności dla funktorów specyficznych (¬,?,T,F):

T8a $(p \leftrightarrow q) \to (\neg p \leftrightarrow \neg q)$
Dem.
Hp(1) →
(2) $in\langle\neg p\rangle(p) \to in\langle\neg p\rangle(q)$ [1×RE]
(3) $(\neg p \leftrightarrow \neg p) \to (\neg p \leftrightarrow \neg q)$ [2,D*in*]
(4) $\neg p \leftrightarrow \neg p$ [**TT**]
(5) T [3,4×MP]

T8b $(p \leftrightarrow q) \to (?p \leftrightarrow ?q)$
Dem.
Hp(1) →
(2) $\sim p \leftrightarrow \sim q$ [1×RE]
(3) $\neg p \leftrightarrow \neg q$ [1,T8a×MP]
(4) $\sim\neg p \leftrightarrow \sim\neg q$ [3×RE]
(5) T [2,4,D?]
T8c $(p \leftrightarrow q) \to (\mathrm{T}([p]) \leftrightarrow \mathrm{T}([q]))$
Dem.
Hp(1) →
(2) T [1,AT×RE]
T8d $(p \leftrightarrow q) \to (\mathrm{F}([p]) \leftrightarrow \mathrm{F}([q]))$
Dem.

Hp(1) →
(2) $\neg p \leftrightarrow \neg q$ [1,T8a×RE]
(3) T [2,D¬×RE]

Możemy rozszerzyć prawo i reguły ekstensjonalności dla **KRZ** o nowe funktory. Będziemy oznaczać je tak samo (tj. odpowiednio: PE i RE).

Zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie 1. *System* **TT2** *zawiera się inferencyjnie w systemie* **TT3**.

W dowodzie wystarczy jedynie pokazać, że EF i AF są tezami systemu **TT3**:

T9 $F(x) \leftrightarrow F([T(x)])$ (=EF)
Dem.

(1a)	$F(x)$	[zd1]
(1b)	$x=[a]$	[1a×Rδ]
(1c)	$F([a])$	[1a,1b×REI]
(1d)	$a \leftrightarrow T([a])$	[AT]
(1e)	$F([a]) \leftrightarrow F([T([a])])$	[1d×RE]
(1f)	$F([T([a])])$	[1c,1e]
(1g)	$F([T(x)])$	[1b,1f×REI]
(1)	$F(x) \rightarrow F([T(x)])$	[1a → 1g]
(2a)	$F([T(x)])$	[zd2]
(2b)	$x=[b]$	[2a×Rδ]
(2c)	$F([T([b])])$	[2a,2b×REI]
(2d)	$T([b]) \leftrightarrow b$	[AT]
(2e)	$F([b])$	[2c,2d×RE]
(2f)	$F(x)$	[2b,2e×REI]
(2)	$F([T(x)]) \rightarrow F(x)$	[2a → 2f]
(3)	$F(x) \leftrightarrow F([T(x)])$	[1,2]

T10 $T(x) \rightarrow \sim F(x)$ (=AF)
Dem.

(1)	$[T(x)]=[T([T(x)])] \rightarrow \sim T([T(x)]) \wedge \sim F([T(x)])$	[AST(x/[T(x)])]
(2)	$[T(x)]=[T(x)] \rightarrow \sim T(x) \wedge \sim F([T(x)])$	[1,AT×RE]
(3)	$[T(x)]=[T(x)]$	[**TT**]
(4)	$\sim T(x) \wedge \sim F([T(x)])$	[2,3×MP]
(5)	$\sim T(x) \wedge \sim F(x)$	[4,T9×RE]
(6)	$T(x) \rightarrow \sim F(x)$	[5,**KRZ**]

Kończy to dowód tego twierdzenia.

Tezą systemu **TT** jest odpowiednik tezy T7, dla schematu samozwrotności z uwagi na prawdę:

T11 $x=[T(x)] \rightarrow ?T(x)$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$\sim T(x) \wedge \sim F(x)$	[1,AST×MP]
(3)	$\sim T(x) \wedge \sim \neg T(x)$	[2,T6×RE]
(4)	T	[3,D?]

Tezami są tu również:

T12a $[p]=[p]$ [**TI**]

T12b $[p] \neq [\sim p]$[21]

Dem.

(1)	$[p]=\sim[p]$	[zdn]
(2)	$T([p]) \leftrightarrow T(\sim[p])$	[1xRE]
(3)	$p \leftrightarrow \sim p$	[2,ATxRE]
(4)	p	[3,**KRZ**]
(5)	$\sim p$	[3,**KRZ**]
	sprz.	[4,5]

Dem.

(1)	$[p]=[\sim p]$	[zdn]
(2)	$T([p]) \leftrightarrow T([\sim p])$	[1×RE]
(3)	$p \leftrightarrow \sim p$	[2,AT×RE]
(4)	p	[3,**KRZ**]
(5)	$\sim p$	[3,**KRZ**]
	sprz.	[4,5]

T12c $[p]=[\neg p] \rightarrow ?p$

Dem.

	Hp(1) $\rightarrow$	
(2)	$T([p]) \leftrightarrow T([\neg p])$	[1×RE]
(3)	$p \leftrightarrow \neg p$	[2,AT×RE]
(4)	$(\sim p \vee \neg p) \wedge (\sim \neg p \vee p)$	[3]
(5)	$(\sim p \wedge \sim \neg p) \vee (\neg p \wedge p)$	[4]
(6)	$\sim p \wedge \sim \neg p$	[5,T1c]
(7)	T	[6,D?]

[21] Wyrażenie typu $x \neq y$ jest skrótem wyrażenia: $\sim(x=y)$.

T12d	$[p]=[T([p])] \rightarrow ?p$	
Dem.		
	$Hp(1) \rightarrow$	
(2)	$[p]=[T([p])] \rightarrow \sim T([p]) \wedge \sim F([p])$	[AST]
(3)	$\sim T([p]) \wedge \sim F([p])$	[1,2×MP]
(4)	$\sim T([p]) \wedge \sim \neg T([p])$	[3,T6×RE]
(5)	$?T([p])$	[4,D?]
(6)	T	[5,AT×RE]

T12e	$[p]=[F([p])] \rightarrow ?p$	
Dem.		
	$Hp(1) \rightarrow$	
(2)	$[p]=[F([p])] \rightarrow ?T([p])$	[T7]
(3)	$?T([p])$	[1,2×MP]
(4)	T	[3,AT×RE]

Bibliografia

Dummett M. (1991) *The logical Basis of Metaphysics*, Duckworth, London. Tłum. polskie W. Sady, Dummet 1998, *Logiczna podstawa metafizyki*, PWN, Warszawa 1998.

Nowaczyk A. (2001) *O roli cudzysłowu w filozofii*, „Edukacja Filozoficzna", 32, s. 73–79.

Sinowjew A. (1972) *Nichttraditionelle Quantorentheorie* (tłum. z rosyjskiego H. Wessel) [w:] H. Wessel (red.), *Quantoren-Modalitäten-Paradoxien*, Beiträge zur Logik Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, s. 179–205.

Sinowjew A., Wessel H. (1975) *Logische Sprachregeln*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Słupecki J., Borkowski L. (1969) *Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości*, PWN, Warszawa.

Tarski A. (1933) *Pojęcie prawdy w językach nauk dedukcyjnych*, Towarzystwo Naukowe Warszawskie, Warszawa, przedruk [w:] Tarski (1995), s. 13–172, (1936), *O ugruntowaniu naukowej semantyki*, „Przegląd Filozoficzny", 39, s. 50–57, przedruk [w:] Tarski (1995), s. 173–185.

Tarski A. (1936) *Der Wahrheitsbegriff in den formaliesierten Sprachen*, „Studia Philosophica", I (1935), s. 261–405.

Tarski A. (1944), *The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantic*, „Philosophy and Phenomenological Review", 4, s. 341–375. Tłum. polskie J. Zygmunt, *Semantyczna koncepcja prawdy i podstawy semantyki* [w:] Tarski (1995) s. 228–282. (1995), *Pisma logiczno-filozoficzne*, t. 1, *Prawda*, J. Zygmunt (red.), PWN, Warszawa.

Tugendhat E. (1960) *Tarskis semantische Definition der Wahrheit und ihre Stellung innerhalb der Wahrheit in logischen Positivismus*, „Philosophische Rundschau", 8, s. 131–159. Tłum. polskie J. Sidorek, *Tarskiego definicja prawdy i jej miejsce w historii problemu prawdy w pozytywizmie logicznym* [w:] *Tugendhat* (1999), s. 166–205.

Tugendhat E. (1999) *Bycie, prawda. Rozprawy filozoficzne*, Oficyna Naukowa, Warszawa.

Wessel H. (1984) *Logik*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

Woleński J. (1993) *Samozwrotność i odrzucanie*, „Filozofia Nauki", 1, s. 88–102.

Woleński J. (2005) *Epistemologia*, PWN, Warszawa.